0.1 DG category

ここでは k を可換環、あるいは体として話を進める。

Definition 0.1.1

A が k-algebra とは、A が k-module であり、k-linear な unit をもつ mulitipulication

$$A \otimes_k A \longrightarrow A$$

が与えられた時のことをさす。つまり、k-module であり環であり、その k の作用と環の積が可換な状況である。

Definition 0.1.2

$\mathcal{A}$ が k-category であるとは、k-module の category で enrich された category である。つまり、各 object に関する $\mathrm{Hom}(X,Y)$ が k-module であり、composition

$$\mathrm{Hom}(X,Y) \otimes_k \mathrm{Hom}(Y,Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,Z)$$

が k-module の準同型になっている状況を差す。

Example 0.1.3

k-category with one object is k-algebra

Example 0.1.4

$\mathbf{Mod}_k$ は k-catgeory

Definition 0.1.5

$\mathcal{A}$ が DG category とは、$\mathcal{A}$ が k-category であり、DG k-module の category で enrich された category である。つまり、各 object に関する $\mathrm{Hom}(X,Y)$ が DG k-module であり、composition

$$\mathrm{Hom}(X,Y) \otimes_k \mathrm{Hom}(Y,Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,Z)$$

が 0 次の DG k-module の準同型になっている状況を差す。

Example 0.1.6

DG k-category with one object is DG k-algebra

proof)　Leibniz rule だけ確認すると、$f, g \in \mathcal{A} = \mathrm{Hom}(*, *)$ に対し、$f \in \mathcal{A}^p, g \in \mathcal{A}^q$ とすると、

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{A} \otimes_k \mathcal{A})^{p+q=n} \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "d"'] & \mathcal{A}^n \arrow[d, "d"] \\ (\mathcal{A} \otimes_k \mathcal{A})^{n+1} \arrow[r, "\mu"'] & \mathcal{A}^{n+1} \end{tikzcd}$$

の可換図が成り立つので、

$$d(fg) = \mu(d(f \otimes g)) = \mu(d(f) \otimes g + (-1)^p f \otimes d(g)) = d(f)g + (-1)^p f d(g)$$

□

Example 0.1.7

$\mathcal{A}$ を DG category としたとき、$\mathcal{A}^{op}$ を opposite category とする。ただし、morphism の合成に関して、

$$\mathrm{Hom}_{A^{op}}(X, Y) \otimes \mathrm{Hom}_{A^{op}}(Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A^{op}}(X, Z)$$

は $f \otimes g \mapsto (-1)^{pq} fg$ と定義する。ただし、$f \in \mathrm{Hom}_{A^{op}}(X, Y)^p$, $g \in \mathrm{Hom}_{A^{op}}(Y, Z)^q$ である。これより A^{op} も DG category となり、これを opposite dg category と呼ぶ。

Example 0.1.8

$Ch(k)$ を k-module の complex の category とする。この morphism は chain map で、その次数は 0 である。これとは別に、$C_{dg}(k)$ を object を k-module の complex。そして、morphism は、

$$\mathrm{Hom}_{C_{dg}(k)}(X, Y) = \{\mathrm{Hom}(X, Y)^n : \text{次数 } n \text{ の準同型 } \}_{n \in \mathbf{Z}}$$

とおく。そして、defferencial を

$$d(f) = d_Y \circ f - (-1)^n f \circ d_X$$

により定義すれば、$C_{dg}(k)$ は DG catgeory である。

Definition 0.1.9

$\mathcal{A}$ を DG category としたとき、$Z^0(\mathcal{A})$ を object は $\mathcal{A}$ と同じで、

$$\mathrm{Hom}_{Z^0(\mathcal{A})}(X,Y) = Z^0(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)) = \mathrm{Ker}(d^0 : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)^0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)^1)$$

と定義する。また同じように、$H^0(\mathcal{A})$ を object は $\mathcal{A}$ と同じで

$$\mathrm{Hom}_{H^0(\mathcal{A})}(X,Y) = H^0(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y))$$

で定義する。

Example 0.1.10

A : k-algebra としたとき、$Z^0(C_{dg}(k)) = Ch(k)$ であり、$H^0(C_{dg}(k)) = H(k)$ である。

proof) $C_{dg}(A)$ の morphism は n 次準同型の族であった。さらに、

$$d^0 : \mathrm{Hom}(X,Y)^0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,Y)^1$$

は $d^0(f) = d_Y \circ f - f \circ d_X$ で与えられていた。よって、

$$\mathrm{Ker}d^0 = \{f \in \mathrm{Hom}(X,Y)^0 \mid d_Y \circ f = f \circ d_X\}$$

であり、これは chain map の定義と一致する。よって、$Z^0(C_{dg}(k)) = Ch(k)$

□

Definition 0.1.11

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を DG category としたとき、$F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ が DG Functorc とは、

$$F_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(FX,FY)$$

の写像が dg k-module の morphism である。

Definition 0.1.12

dgcat_k を small dg category を object とし、morphism を dg functor で定義する。このとき、ϕ : empty dg category が initial object であり、$*$: dg category with one object whose $\mathrm{Hom}(*,*) = \{*\}$ が terminal object である。

Definition 0.1.13

$F, G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ を dg functor としたとき、

$$\mathrm{Hom}(F,G)^n = \{\varphi_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(FX, GX)^n \mid G(f)\phi_X = \phi_Y F(f)\ ,\ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)\}$$

と natural transformation で定義し、defferential を $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(-,-)$ における defferential により定義すれば、dg functor の category は dg category となる。これを $\mathrm{Hom}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ とかく。

Theorem 0.1.14

$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathrm{dgcat}_k$ に対し、

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mathcal{C}) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathrm{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{C}))$$

as dg category.